Kapitel 3

Segmentering

Segmentering af et billede er en proces hvorved billedet opdeles i områder sådan at hvert område beskriver et "objekt". Segmentering er i en vis forstand en komplementær proces til kantdetektion på den måde at kanterne antages at angive grænserne mellem områderne. Ofte vil der imidlertid ikke være overensstemmelse mellem kanterne (detekteret ved nogen kantdetektionsmetode) og de fundne segmenter. F.eks. vil mange kanter ofte udgøre åbne konturer.

I dette kapitel diskuteres nogle hyppigt anvendte metoder til segmentering af billeder, og det diskuteres hvorledes segmenter kan karakteriseres ved intensitet, form etc. En sådan karakterisering kan dels betragtes som en kodning, dels som en grundlag for at kunne foretage en genkendelse/klassifikation af de fundne segmenter.

Segmentering er en fundamental billedbehandlingsoperation. Dels er en segmentering nødvendig i mange billedbehandlingsopgaver, dels er segmenteringsoperationen teoretisk interessant, fordi den lige som kantdetektionen er meget svær at foretage robust og nøjagtig. Problemet er, hvorvidt en intensitetsændring er tilstrækkelig kraftig til at markere overgangen til et nyt segment, eller om ændringen skal betragtes som støj eller segmentintern intensitetsvariation. Som ved kantdetektion lokaliseres segmenternes grænser ikke altid korrekt og nogle intuitivt sammenhængendende/adskildte segmenter detekteres som adskildte/sammenhængende.

3.1 Segmentering ved grænseværdiafskæring

Den simpleste form for segmentering af et billede vil være at bestemme segmenterne ved de billedområder, der fremkommer ved binarisering efter en grænseværdi. Problemet med metoden er oplagt at det kan være umuligt at bestemme en fornuftig grænseværdi. Den store fordel ved segmenteringsmetoder baseret på grænseværdiafskæring er at disse kan være meget hurtige (afhængig af den tid der går til bestemmelse af grænseværdierne). I industrielle situationer hvor man kan kontrollere baggrunden, belysningen mv. vil disse metoder ofte være brugbare. I andre situationer vil metoderne ofte giver ringe resultater.

En meget enkelt metode til bestemmelse af en global hhv. lokal grænseværdi er at finde bunden af en dal i histogrammet over intensitetsværdierne for billedet hhv. et område i billedet. Ofte vil histogramet imidlertid have mange lokale minima. En udglatning af histogrammet vil derfor være oplagt inden detektion af dalen. En anden mulighed er at detektere samtlige dale, og foretage segmenteringen ud fra sættet af grænseværdier. Denne metode kan i visse tilfælde producere rimelige resultater. Forudsætningen er at intensitetsvariationen inden for hvert "objekt" er forholdsvis konstant og afvigende fra "nabo-objekternes" intensitet. Det er let at forestille sig mange metoder til analyse af intensitetshistogrammet. For en nøjere beskrivelse af sådanne metoder refereres til oversigtsartiklen: *Sahoo, Soltani and Wong: A Survey of Thresholding Techniques; Computer Vision, Graphics and Image Processing, vol. 41 1988.*

3.1.1 Optimal grænseværdi for bimodale fordelinger

I industrielle situationer hvor billedet, ud over baggrunden, kun viser objekter der (under den givne belysning) reflekterer omtrentlig lige meget lys mod kameraet (uafhængig af objekternes position og rumlige orientering), er det ofte muligt at bestemme en optimal grænseværdi. I dette tilfælde kan man estimere tæthedsfunktionerne $p_1(x)$ hhv. $p_2(x)$ for intensiteterne hidrørende fra baggrunden hhv. for objekterne. Hvis belysningen er konstant kan funktionerne ofte bestemmes a priori. For et givet billede kan vi lade P_1 hhv. P_2 angive det relative antal pixels, der afbilder baggrund hhv. objekter. Således er $P_1 + P_2 = 1$. Den samlede tæthedsfunktion (for hele billedet) vil være gived ved:

$$p(x) \;=\; P_1 p_1(x) \;+\; P_2 p_2(x) \tag{3.1}$$

Lad μ_1 hhv. μ_2 være middelværdierne for $p_1(x)$ hhv. $p_2(x)$. Antag at baggrunden er mørkere end objekterne, dvs. at $\mu_1 < \mu_2$. Givet grænseværdien T er sandsynligheden for fejlagtigt at klassificere baggrund som objekt:

$$e_1(T) \;=\; \int_T^\infty p_1(x)dx \tag{3.2}$$

Tilsvarende er sandsynligheden for fejlagtigt at klassificere objekt som baggrund, givet T, bestemt ved:

$$e_2(T) \;=\; \int_{-\infty}^T p_2(x)dx \tag{3.3}$$

Den samlede samdsynlighed for fejlklassifikation er derfor:

$$e(T) \;=\; P_1 e_1(T) \;+ P_2 e_2(T) \tag{3.4}$$

Vi ønsker at bestemme T således at $e(T)$ minimeres.

$$\frac{\partial e(t)}{\partial T} \;=\; -P_1 p_1(T) + P_2 p_2(T) \;=\; 0 \tag{3.5}$$

Givet funktionerne $p_1(x)$ og $p_2(x)$ samt tallene P_1 og P_2, kan vi (evt. ved brug af numeriske metoder) bestemme den optimale grænseværdi T ved løsning af ovenstående ligning. Det bør bemærkes, at denne værdi ikke nødvendigvis svarer til positionen af den dybeste dal i $p(x)$.

Eksempel

Det er ofte rimeligt at antage at såvel $p_1(x)$ som $p_2(x)$ er normalfordelinger.

$$p_i(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \qquad i = 1,2 \tag{3.6}$$

I dette tilfælde er T altså løsning til ligningen:

$$\log(P_1\sigma_2) - \frac{(T-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \;=\; \log(P_2\sigma_1) - \frac{(T-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \tag{3.7}$$

Dette er en andengradsligning i T.

$$AT^2 \;+\; BT \;+\; C \;=\; 0 \tag{3.8}$$

hvor

$$\begin{aligned} A &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ B &= 2(\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2) \\ C &= \sigma_1^2\mu_2^2 - \sigma_2^2\mu_1^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \log(\frac{P_1\sigma_2}{P_2\sigma_1}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Der kan altså være tale om 0, 1 eller 2 reelle rødder. For $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ fremkommer netop een løsning:

$$T \;=\; \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \log(\frac{P_2}{P_1}) \tag{3.10}$$

Det overlades til læseren at analysere og fortolke de andre tilfælde.

Som tidligere nævnt er det i visse situationer muligt at estimere tæthedsfunktionerne på forhånd. Kendskabet til hyppighederne P_1 og P_2 er imidlertid også nødvendige for en optimal bestemmelse af T. I visse situationer kan disse også estimeres på forhånd. Begge estimationer er (formodentlig) unøjagtige. Afhængig af tæthedsfordelingernes form, er det muligt at blot en lille estimationsfejl vil bevirke en stor fejl i beregnede værdi af T. Ved benyttelse af metoden bør man undersøge en sådan mulighed for ustabilitet. Iøvrigt kan det bemærkes, at T i praksis ofte kun vil kunne antage et relativt lille antal forskellige værdier. Det vil derfor være overkommeligt at udregne (3.4) for disse, og bestemme T ved en udtømmende søgning. Vi kan imidlertid stadig ikke undgå at estimere de førnævnte funktioner og værdier.

3.2 Simpel segmentering ved nabosammenligninger

Lidt mere avanceret end bestemmelse af segmenter ved grænseværdiafskæring er, at bestemme tilhørsforholdet for de enkelte pixels ved sammenligning af intensiteten i nabo billedelementerne. Ved sådanne metoder benyttes også en grænseværdi til afgørelse af hvorvidt to pixels tilhører samme segment. Denne værdi bestemmes ofte globalt evt. som parameter til segmenteringsrutinen.

Segmentering ved nabosammenligninger er hurtige metoder, fordi de ofte kun kræver et gennemløb af billedelementerne. Tilsvarende er kvaliteten af resultaterne ofte mindre gode. Som vi skal se senere kan det ofte være en fordel først at foretage en initiel segmentering og senere af forfine denne. Som initiel segmentering er metoder der benytter nabosammenligninger ofte udmærkede. Nedenstående kodeskitse eksemplificerer segmenteringsmetoden.

```
procedure segment(i,j)
   integer segnr;

   if (ens(I[x][y],I[x-1][y])) begin
      if (ens(I[x][y],I[x][y-1]))
            segnr := merge(x,y);
      else segnr := Seg[x-1][y];
   end else if (ens(I[x][y],I[x][y-1]))
            segnr := Seg[x][y-1];
   else    segnr := newseg();

   Seg[x][y] := segnr;
end
```

hvor I er intensitetsbilledet, Seg er et billede angivende billedelementernes segmentnummer, newseg() er en funktion der returnerer et ubrugt segmentnummer og ens(a,b) er en funktion der returnerer sand eller falsk afhængig af et prædikat. Dette kan eksempelvis angive sand hvis den numeriske differens mellem de to intensitetsværdier er mindre end en vis (foruddefineret) grænseværdi, dvs. hvis $|a - b| < T$. Proceduren segment(i,j) tænkes aktiveret en gang for alle billedpunkter, startende fra billedpunkter med de mindste koordinatværdier. Det er naturligvis nødvendigt af foretage segmenteringen af første billedrække inden proceduren segment(i,j) anvendes.

Funktionen merge(x,y) er mere kompliceret idet det meget vel kan tænkes at den kaldes i en situation hvor Seg[x-1][y] $\neq$ Seg[x][y-1]. Dette svarer til at to forskellige segmenter mødes og forenes i et. Det er derfor nødvendigt at gå tilbage i segmenteringen og "rette" i allerede tildelte segmentnumre. En måde at styre dette problem er at opretholde en liste over samtlige segmenter, og eventuel renummerering. Definition af og operation på en sådan liste er illustreret i nedenstående programskitse. Ved anvendelse af skitsen antages det at funktionen newseg() initialiserer segmenttabellens indgange *nr* hhv. *next* med det ny segmentnummer hhv. konstanten -1.

```
typedef struct { int nr, next; } elem;
elem         *segtable;

int merge(x,y)  int x,y;  begin
   int seg1, seg2, temp, index;

   seg1 = segtable[seg[x-1][y]].nr;
   seg2 = segtable[seg[x][y-1]].nr;

   if (seg1 != seg2) begin
      if (seg1 > seg2) begin
         temp = seg1; seg1 = seg2; seg2 = temp;
```

```
      end
      segtable[seg2].nr = seg1;
      index = seg2;
      while (segtable[index].next != -1) begin
         index = segtable[index].next;
         segtable[index].nr= seg1;
      end
      segtable[index].next = segtable[seg1].next;
      segtable[seg1].next  = seg2;
   end
   return(seg1);
end
```

3.3 Segmentering ved Split-metoder

Segmentering ved split-metoder består i en rekursiv opdeling af billedet indtil et prædikat er opfyldt for alle segmenter. Prædikatet kan eksempelvis afgøre hvorvidt intensiteterne i området er tilstrækkelig ens, eller om en området indeholder kanter. Et oplagt mål vil være variansen af intensiteten i området. Opdeligen foretages typisk i fire lige store rektangulære delbilleder. Derfor egner split-metoder sig overordentlig godt til implementation ved en *quad-tree* repræsentation af billedet (split-metoden genererer faktisk en sådan repræsentation). Se kapitel 4 for en beskrivelse af quad-tree repræsentationen.

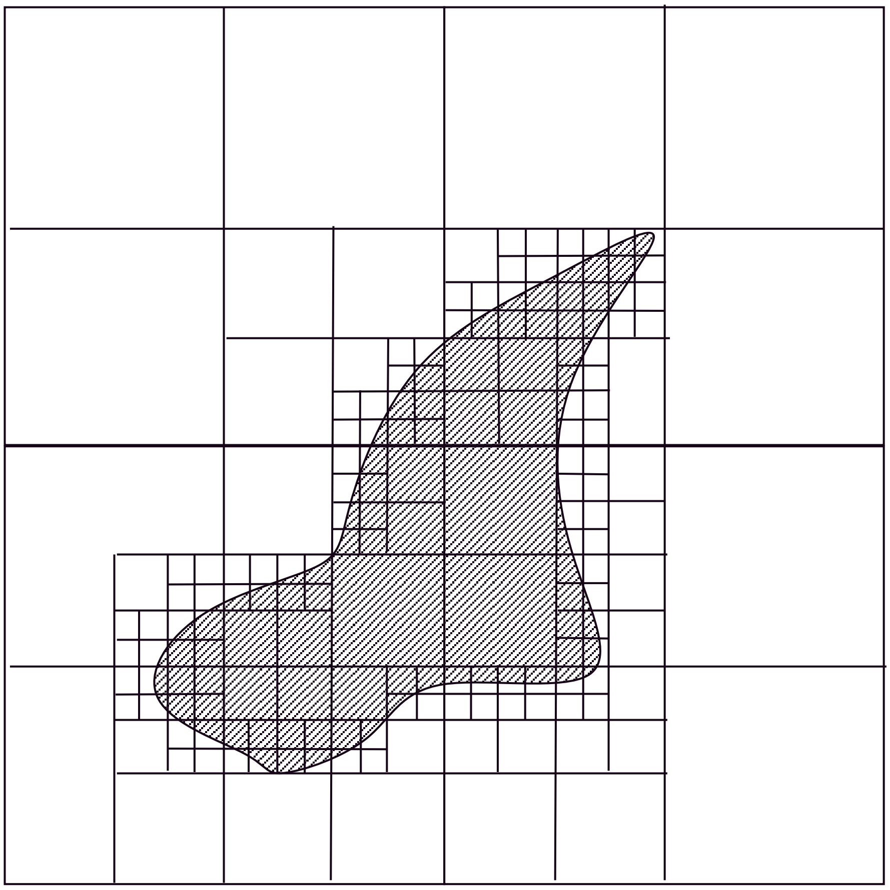
Et væsenligt problem ved split-metoderne er at nabopixels, der faktisk tilhører samme segment, ofte vil blive detekteret som tilhørende forskellige segmenter. Dette er afhængig af billedelementernes lokalisering i forhold til opdelingen. Der er derfor sædvanligt at kombinere split-metoder med merge-metoder.

3.4 Segmentering ved merge-metoder

I merge-segmenteringsmetoder startes med en initiel segmentering, hvorefter segmenterne grupperes rekursivt indtil et *prædikat* er falsk for samtlige nabosegmenter. Den initielle segmentering kan eksempelvis være bestemt af billedelementerne selv, ved metoden beskrevet i afsnit 3.2, eller ved resultatet af en split-segmentering. Prædikatet kan f.eks. måle om forskellen i middelintensitet for to mabosegmenter er mindre end en vis grænseværdi. Det største problem ved merge-metoderne er at rækkefølgen af segmentforeninger er afgørende for resultatet. En måde at afgøre hvilen segmentforening der skal foretages først, er at vælge den der opfylder prædikatet bedst muligt.

Overordnet består segmenteringsproblemet i at opdele et billede R i områder $R_1 \dots R_n$ sådan at:

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} R_i &= R \\ \forall i &: R_i \text{ er sammenhængende} \\ \forall i \neq j : R_i \cap R_j &= \emptyset \\ \forall i : P(R_i) &= TRUE \end{aligned} \tag{3.11}$$



Figur 3.1: Split-segmentering vha. et quad-træ.

$$\forall i \neq j : P(R_i \cup R_j) \quad = \quad FALSE$$

De tre første betingelser, at segmenterne er disjunkte, sammenhængende, og tilsammen udgør hele billedet er ikke overraskende. De sidste to betingelser siger at segmenteringen (bestemt ved prædikatet P), er givet ved at alle segmenter opfylder P, men at ingen forening (der opfylder de tre første krav) af to segmenter opfylder P. P kaldes et *merge-prædikat*. Det bør bemærkes at to segmenteringer, der begge benytter samme merge-prædikat, og begge opfylder ovenstående krav, udmærket godt kan være forskellige. Dette er afhængig af den rækkefølge hvori segmenterne forenes.

En måde at formulere en entydig segmentering er at definere denne som minimum af en omkostningsfunktion. Lad $\{ \ S_t \ \}$ være en segmentering, $S_t = \{R_i, R_j, \ldots, R_k\}$ være et segment, komponeret af en række initielt detekterede delsegmenter R_i. Lad $K = \sum_t C(S_t)$ være en omkostningsfunktion. Idet det antages at K har et entydigt (globalt) minimum, bestemmes segmenteringen sådan at omkostningsfunktionen antager dette minimum. Problemet ved denne formulering er, at det er svært at finde en konveks omkostningsfunktion (eller blot at kunne garantere at K kun har ét minimum). Selv om dette er tilfældet, vil antallet af mulige segmentopdelinger være overordentlig stort. Det kan vises at segmenteringsproblemet er NP-komplet. Der findes derfor ingen algoritmer, der med garanti er i stand til at foretage segmenteringen i polynomiel tid.

Segmenteringen søges i stedet ofte fundet sådan at denne er sub-optimal. Dette opnås f.eks. ved kun at betragte en delmængde af de mulige segmenteringer. I dette tilfælde vil omkostningsfunktionen ofte have flere lokale minima, hvilket betyder at vi kan garantere en lokalt (men ikke nødvendigvis globalt) bedste segmentering. I praksis vil sub-optimale segmenteringer ofte være tæt ved den optimale. Den mest benyttede metode til beregning af den sub-optimale løsning er at minimere $K = \sum_t C(S_t)$ iterativt. Anderledes sagt bestemmes den næste segmentforening som den, der blandt samtlige mulige foreninger af nabosegmenter, mindsker K mest muligt. Det er oplagt at denne strategi ikke altid vil føre til den bedste segmentering.

I praksis benyttes prædikatet P til at afgøre hvorvidt et forskellighedsmål for to segmenter overstiger en vis foruddefineret tærskelværdi (dvs. en "veto-ret"). Omkostningsfunktionen (her betragtet som funktion af intensiteterne i to nabosegmenter) vil derimod angive et numerisk mål for graden af forenelighed. Dette mål kan udmærket godt være lig den værdi, der indgår i P, men det er ikke nødvendigt. Eksempelvis kan prædikatet angive hvorvidt der findes en kant mellem to segmenter. Omkostningsmålet kan eksempelvis angive fejlen ved en approksimation (i mindste kvadraters betydning) med et 3. grads polynomium til intensitetsfladen i den hypotetiske forening af de to segmenter. Afhængig af billedtypen og formålet med segmenteringen kan begge mål vælges simplere, f.eks. som funktioner af:

- Forskellen i middelintensitet for de to segmenter.
- Variansen af intensitetsværdierne i foreningssegmentet.
- (Maksimum - Minimum) af intensiteten i foreningssegmentet.
- Summen af intensitetsgradientens størrelse langs segmentgrænsen.
- Segmenternes størrelse.

Kvaliteten af en merge-segmentering afhænger af prædikatet, af omkostningsfunktionen samt af rækkefølgen hvori segmenterne forenes. Et fornuftigt valg af disse er svært, og afhænger af billederne samt af formålet med segmenteringen. Som regel vil såvel prædikatet som omkostningsfunktionen måle (in)homogeniteten af foreningssegmentet. Mængden af sådanne mål er kun begrænset af fantasien, og det er svært at vurdere målenes kvalitet. I visse tilfælse afgør omkostningsfunktionen den rækkefølge hvori segmenterne forenes. Ofte kan det imidlertid være fordelagtigt først at forene de små segmenter (kan være tidsbesparende) eller de store segmenter (kan øge robustheden). Ved sådanne strategier benyttes et antal merge-faser, hver konstrueret til at udføre bestemte typer af segmentforeninger. Såvel prædikater som omkostningsfunktioner er typisk forskellige for hver merge-fase.

3.5 Split og merge -metoder

Split-og merge metoder til segmentering er meget populære fordi de ofte giver gode resultater. Først foretages en initiel segmentering ved en split-segmentering. Dernæst flettes "kunstigt adskildte" initielle segmenter ved en merge segmentering. Som nævnt ved split-metoderne egner split-og merge metoderne sig godt til implementation ved en quad-tree repræsentation af billedet. Split og merge metoder er særdeles grundigt beskrevet i *Pavlidis: Structural Pattern Recognition; Springer 1977*, der anbefales for særligt interesserede.

3.5.1 Segmentering ved udnyttelse af kantinformation

Som tidligere nævnt er der en dualitet mellem kanter og segmenter i et billede. Nyere algoritmer til segmentering har forsøgt at udnytte kantinformationen i såvel split- som merge-faserne. Implicit kan kantinformationen udnyttes ved i merge-prædikatet at måle (middelværdien af) intensitetsgradientens størrelse i grænseområdet mellem to segmenter, der er kandidater for en fletning. Jo mindre denne værdi er, jo lettere bliver det at forene segmenterne. Eksplicit kan kantinformationen udnyttes i en split-fase ved at kræve, at ingen segmenter må indeholde (eller være gennemskåret af) nogen kant. Lignende krav kan udnyttes i merge-fasen. For nærmere beskrivelse af en segmenteringsmetode, der udnytter kantinformation på denne måde henvises til: *Kunt, Benard and Leonardi: Recent Results in High-Compression Image Coding; IEEE trans. on Circuits and Systems vol. 34 no. 11, 1987.*

Merge prædikater er ofte mere komplicerede end split-prædikater. Derfor er det næppe nogen god ide at give kantinformationen "veto-ret" i en potentiel forening af segmenter. En mulighed er at klassificere kanterne i et billede som "vigtige" og "mindre vigtige". I split-fasen er det væsenligt at ingen segmenter indeholder punkter på begge sider af nogen kant. Derfor bør denne fase benytte alle kanter, og have "veto-ret" mht. opdeling. I merge-fasen kunne man slække på kravet ved kun at udnytte information om de "vigtige" kanter. Det er imidlertid ikke let at angive mål for "vigtigheden" af en kant. Kantlængden samt middelkontrasten over kanten kan f.eks. indgå i beregningen af "vigtigheden" af en kant. Klassifikation af kanter er fortsat et forskningsområde.

3.5.2 Nabografer

Det er ofte overordentligt nyttigt at opretholde let tilgængelig information om hvilke segmenter, der er naboer til hvikle andre. En nabograf er en ikke-orienteret graf der forbinder hvert par af nabosegmenter. Grafen er relativt let at opbygge, men ofte vanskelig at vedligeholde, fordi en fletning af to segmenter får indflydelse på alle nabosegmenterne til de to segmenter, og fordi alle disse nabosegmenters nabografer skal opdateres. Grafen kan være af stor betydning hvis et merge-prædikat ikke kun omfatter information om de to segmenters interne forhold (intensitet, størrelse etc.), men også omfatter information om nabosegmenterne. Grafen er tillige særdeles brugbar i en evt. efterfølgende genkendelsesfase.

3.5.3 Segmentoprydning

Det er ofte et problem i segmentering at ingen (fornuftige) prædikater udelukkende giver store nabosegmenter. Grænserne mellem de (approksimativt korrekt segmenterede) områder vil ofte være fyldt med mange små (ofte 1 til 10 pixels store) segmenter. Disse er somregel ikke ønskede, og ofte forårsagede af rampeformede kanter i intensitetsfunktionen. Det er derfor praksis at rydde op blandt de meget små segmenter efter den egentlige segmentering. En metode er (iterativt) at forene disse segmenter med de nabosegmenter, hvor prædikatsfunktionen/omkostningsfunktionen er mindst (uanset hvor stor den så måtte være). Dette kan imidlertid resultere i "flosede" segmentgrænser. En anden mulighed er at bestemme de små segmenters tilhørsforhold ud fra kantinformation.

3.6 Segmentbeskrivelser

Det er oplagt, under en segmentering, at opsamle information om segmenterne. Denne information kan dels udnyttes i segmenteringen selv, dels i en efterfølgende klassifikation af segmenterne. En anden udnyttelse af segmentbeskrivelserne er ved kodning af billeder. Som det diskuteres i kapitel 4, er en udviklingstendens (blandt flere) inden for billedkodning, at foretage en indledende detektion af kanter og/eller segmentering.

I de følgende afsnit beskrives først en række ofte benyttede karakteriseringer af segmenters form. Derefter beskrives hvorledes den segmentinterne intensitetsvariation kan beskrives. Desuden skal vi diskutere nogle metoder til karakterisering af tekstur.

3.6.1 Areal, kompakthed og længde-bredde forhold

Arealet af et segment er er godt og let beregneligt mål, idet arealet er lig antal billedelementer inden for segmentet. Hvis billedoptagelsesforholdene og dermed objekternes skala er kendt, vil det ofte være muligt at skelne mange "objekter" fra hinanden alene på basis af segmentstørrelserne.

Omkredsen af et segment er sværere at beregne end man umiddelbart skulle tro. Hvis man blot tæller antallet af punkter på randen af segmentet fås et mål, der varierer meget ved rotation af billedet. Hvis randen defineres som tilhørende segmentet hhv. ikke-tilhørende segmentet får vi også forskellige mål. Generelt ønsker vi et mål der er let at beregne, er rotationsinvariant, og tilnærmer det euclidiske mål. Det overlades til læseren at udtænke sådanne mål. Den klassiske definition af kompakthed er :

$$\frac{\text{omkreds}^2}{\text{areal}} \tag{3.12}$$

Bemærk at kompakthededsmålet (i teorien) er invariant over for rotation og skalering, og at det antager minimal værdi for en cirkelskive. Et andet mål for kompakthed er givet ved arealet af segmentet divideret med arealet af det omgivende rektangel for segmentet. Hvis det omgivende rektangel har akseparallelle kanter er dets areal let at finde, men vil ofte være en dårlig tilnærmelse til det "korrekte" omgivende rektangel hvis segmentet er aflangt og ikke-akseparallelt. Længde og bredde af det "korrekte" omgivende rektangel findes ved ved beregning af de principale akser for segmentet (beskrives i det følgende afsnit). Graden af hvor aflangt et segment er, kan måles ved forholdet mellem den mindste (bredde) og den største (længde) af kanterne i det omgivende rektangel. Dette er ofte en udmærket karakterisering af et segments form.

3.6.2 Principale akser

De principale akser for et segment er givet ved egenvektorene for kovariansmatricen bestemt ved koordinaterne for billedpunkterne i segmentet (opfattet som stokastiske variable). I det følgende beskrives hvorledes disse akser findes. Derefter beskrives deres anvendelse. Lad segmentet have N billedelementer (x_i, y_i), og lad $\mathbf{m}_x$ hhv. $\mathbf{m}_y$ være lig de forventede værdier $E\{x_i\}$ og $E\{y_i\}$ af x- hhv. y- koordinaterne for billedpunkterne. Lad endvidere:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_x & m_y \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Således angiver $\mathbf{m}$ massemidtpunktet for segmentet. Kovariansmatricen $\mathbf{C}$ defineres da ved:

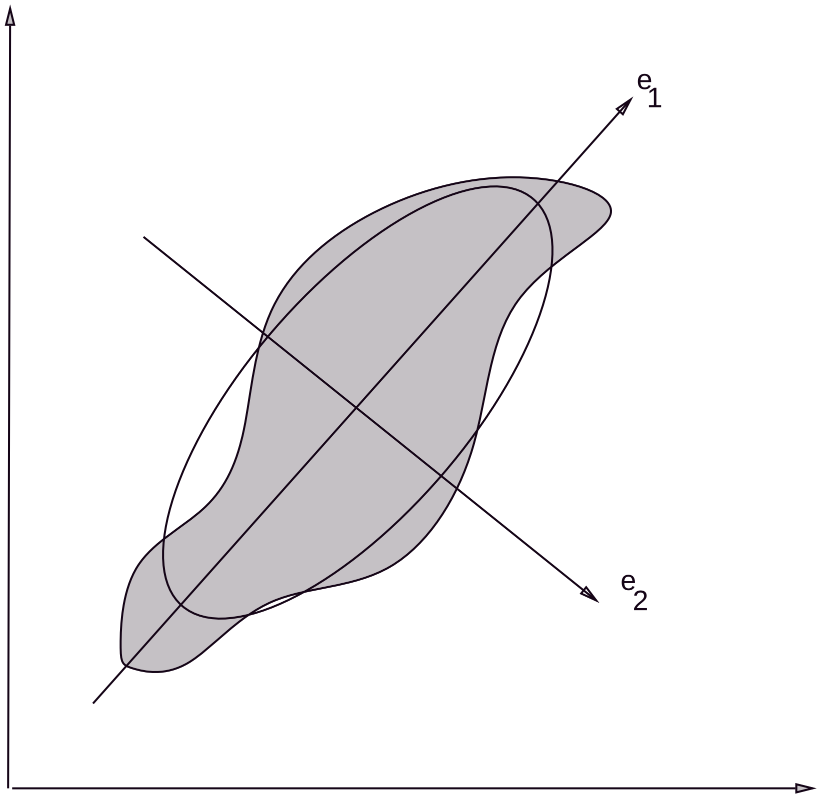
$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= E\left\{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^t(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\} && (3.14) \\ &= E\left\{\mathbf{x}^t\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^t\mathbf{m} + \mathbf{m}^t\mathbf{m}\right\} && (3.15) \end{aligned}$$

Idet vi approksimerer den forventede værdi med middelværdien, får vi:

$$\mathbf{C} \approx \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i^t \mathbf{x}_i\right] - \mathbf{m}^t\mathbf{m} \tag{3.16}$$

Kovariansmatricen er altså 2×2 med formen:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\approx \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} && (3.17) \\ a &= \sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i)^2 && (3.18) \\ b &= \sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i)^2 && (3.19) \\ c &= \operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i)(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i) && (3.20) \end{aligned}$$



Figur 3.2: Egenvektorer for kovariansmatricen for et segment, samt ellipsen med akser givet ved $2\sigma_x$ og $2\sigma_y$.

Da matricen $\mathbf{C}$ er reel og symmetrisk er egenværdierne alle reelle. Desuden er egenvektorerne ortogonale. Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{C}$ er givet ved:

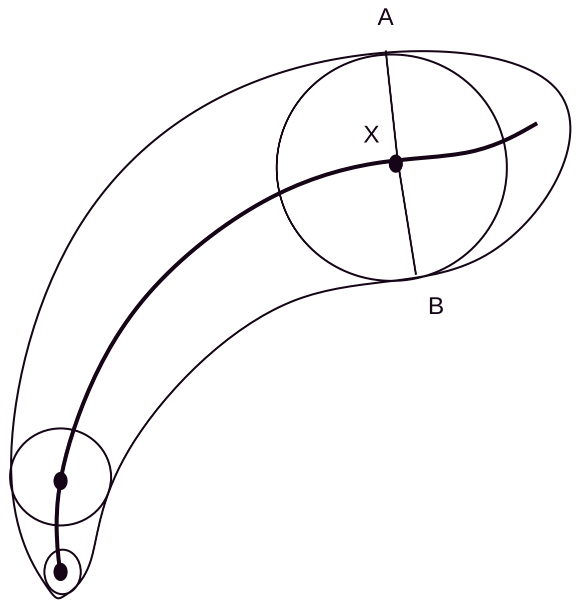
$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) \;=\; \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2) = 0 \tag{3.21}$$

Egenværdierne er lig:

$$\lambda = \frac{a+b}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} \tag{3.22}$$

Egenvektorerne er givet ved $(e_{1x}, e_{1y}) = (-c, \lambda_1 - a)$ og den orthogonale vektor $(e_{2x}, e_{2y}) = (\lambda_1 - a, c)$. De to egenvektorer peger i retning af maksimal/minimal spredning af segmentet. Graden af segmentspredningen er givet ved egenværdiernes størrelse. Et mål for hvor aflangt (eller kompakt) et segment er, kan derfor beregnes som forholdet mellem de to egenværdier. Ud fra egenvektorene (e_{1x}, e_{1y}) og (e_{2x}, e_{2y}) er det let at finde segmenterts *orientering* ved *arctan* til forholdet mellem egenværdikoordinaterne, for den egenvektor hvis tilhørende egenværdi er størst.

Givet egenvektorerne, og koordinaterne for billedpunkterne på randen af segmentet er det let at finde de fire kantpunkter, der ligger (numerisk) længst væk fra de to linier der er



Figur 3.3: Skelet af et objekt

udspændt af egenvektorerne. For linien udspændt af egenvektoren med mindst egenværdi vil afstanden mellem de to kantpunkter (med størst afstand til linien) bestemme længden af det "korrekte" omgivende rektangel. Tilsvarende findes bredden ved afstanden mellem de to punkter hvis afstand er størst til linien udspændt af egenvektoren med størst egenværdi. Overvej dette, evt. ved at tegne.

3.6.3 Skeletter

En anden metode til karakterisering af et segment er at beregne segmentets skelet. Dette er defineret ved de punkter X i segmentet hvor:

1. Der findes to punkter A og B på randen af segmentet sådan at afstandende $|XA| = |XB|$.

2. Der findes ingen punkter C på segmentets rand hvis afstand $|XC|$ er mindre end $|XA|$ (eller $|XB|$).

En cirkelskive med centrum i hvert punkt X i skelettet og med radius $|XA|$ vil altså være helt indeholdt i segmentet. En mulig repræsentation (kodning) af et segment vil være mængden af skeletpunkter med tilknyttet radius-information. Der findes et utal af metoder til beregning af skelettet for et segment. En simpel og hurtig metode er beskrevet i Kapitel 2. Generelt er problemet med skeletoperationerne at disse er meget følsomme over for støj i lokaliseringen af segmentets silhouet, og at skelettet ikke er invariant over for rotation af segmentet.

3.6.4 Momenter

Lad $f(x,y)$ være en stykvis kontinuert todimensional funktion, der er konstant lig 0, uden for et begrænset område (segmentet) i billedplanet. Det $(p+q)$'te ordens moment af $f(x,y)$ defineres da ved:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)dxdy \tag{3.23}$$

Under de førnævnte forudsætninger eksisterer momenterne for alle heltallige p og q større end eller lig 0. Moment-sekvensen (m_{pq}) er entydigt bestemt af $f(x,y)$. Omvendt vil moment-sekvensen bestemme f(x,y) entydigt. De *centrale momenter* er givet ved:

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x,y)dxdy \tag{3.24}$$

hvor $\bar{x}$ og $\bar{y}$ er gived ved middelværdierne:

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}} \tag{3.25}$$

Momenterne er særdeles sigende om segmentet. For eksempel er segmentets approksimative orientering ϕ givet ved:

$$\phi = \frac{1}{2} tan^{-1}(\frac{2m_{11}}{m_{20}-m_{02}}) + n\frac{\pi}{2} \tag{3.26}$$

For digitale billeder hvor definitionsmængden er diskret, er de centrale momenter af første, anden og tredie orden givet ved:

$$\mu_{00} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^0 (y-\bar{y})^0 f(x,y) = m_{00} \tag{3.27}$$

$$\mu_{10} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^1 (y-\bar{y})^0 f(x,y) = m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}}(m_{00}) = 0 \tag{3.28}$$

$$\mu_{01} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^0 (y-\bar{y})^1 f(x,y) = m_{01} - \frac{m_{01}}{m_{00}}(m_{00}) = 0 \tag{3.29}$$

$$\mu_{11} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^1 (y-\bar{y})^1 f(x,y) = m_{11} - \frac{m_{10}m_{01}}{m_{00}} \tag{3.30}$$

$$\mu_{20} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^2 (y-\bar{y})^0 f(x,y) = m_{20} - \frac{m_{10}^2}{m_{00}} \tag{3.31}$$

$$\mu_{02} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^0 (y-\bar{y})^2 f(x,y) = m_{02} - \frac{m_{01}^2}{m_{00}} \tag{3.32}$$

$$\mu_{30} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^3 (y-\bar{y})^0 f(x,y) = m_{30} - 3\bar{x}m_{20} + 2m_{10}\bar{x}^2 \tag{3.33}$$

$$\mu_{12} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^1 (y-\bar{y})^2 f(x,y) = m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10} \tag{3.34}$$

$$\mu_{21} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^2 (y-\bar{y})^1 f(x,y) = m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01} \quad (3.35)$$

$$\mu_{03} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^0 (y-\bar{y})^3 f(x,y) = m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01} \quad (3.36)$$

Det er oplagt at de centrale momenter er invariante mht. translation. For $(p+q) = 2, 3, \ldots$, kan man videre definere de *normaliserede centrale momenter* ved:

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\gamma}} \qquad \gamma = \frac{p+q}{2} + 1 \quad (3.37)$$

Fra de normaliserede anden og tredie ordens momenter er det muligt at udlede endnu 7 nye momenter, kaldet *de syv invariante momenter*. Det er muligt at vise at disse (nedenstående) syv størrelser er invariante over for såvel translation og rotation som over for skalering. De er derfor attraktive beskrivelser af et segment, hvis formålet er at genkende segmentet som et blandt flere kendte “objekter”. De syv invariante momenter er givet ved:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \eta_{20} + \eta_{02} && (3.38)\\
\Phi_2 &= (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2 && (3.39)\\
\Phi_3 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2 && (3.40)\\
\Phi_4 &= (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2 && (3.41)\\
\Phi_5 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] \\
&\quad +(3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})\left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] && (3.42)\\
\Phi_6 &= (\eta_{20} - \eta_{02})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03}) && (3.43)\\
\Phi_7 &= (3\eta_{21} - \eta_{30})(\eta_{30} + \eta_{12})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] \\
&\quad +(3\eta_{12} - \eta_{30})(\eta_{21} + \eta_{03})\left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] && (3.44)
\end{aligned}$$

3.6.5 Intensitetsmål

Det er oplagt at beskrive et segment ved en funktion af intensiteten i segmentet. Middelintensiteten, og spredningen af intensiteten er nok de simplest tænkelige mål. Andre mål kunne være koefficienterne til et første- (anden- eller tredie-) ordens, mindste kvadraters fit til intensiteten i segmentet. Disse koefficienter vil beskrive den globale intensitetsvariation. Alternativt kunne man fouriertransformere et billede kun indeholdende segmentet. Den globale intensitetsvariation kunne da beskrives ved fourierkoefficienterne svarende til de laveste frekvenser. I visse tilfælde kan det være relevant at kende afvigelsen fra den globale model af intensitetsfunktionen. Her kan variansen af afvigelsen (residualen) af modellen fra intensiteten selv være et godt mål.

3.7 Tekstur

Ofte vil billedet af et objekt ikke vise en helt glat intensitetsvariation, men vil være tekstureret. En karakterisering af denne tekstur kan være meget afgørende for en klassifikation af objektet. Hvis segmenteringen benyttes i forbindelse med billedkodning vil kendskab til teksturen også være nødvendig for en god rekonstruktion af billedet. I andre situationer er det kun muligt at skelne mellem de forskellige synlige objekter ved at analysere teksturen. Dette er f.eks. tilfældet hvis et objekt og baggrunden er omtrentlig lige lyse. I disse tilfælde foretages segmenteringen på basis af et eller flere teksturmål (nye billeder) og ikke på den oprindelige intensitetsfunktion. Teksturmål er derfor af stor relevans.

Det er meget vanskeligt præcis at definere hvad man forstår ved tekstur. Inden for tekstilindustrien vil tekstur ofte referere til det mønster et vævet stof danner. Dette er i nogen grad regelbundet, men udviser også tilfældige variationer. Hvis man betragter et billede af en stenbunke vil mønstret ofte udvise større grad af tilfældighed. Omvendt vil teksturen af en murstensvæg være meget regelmæssig. Der er således stor grad af variation inden for hvad der normalt forstås ved tekstur. For at kunne tale om tekstur er det imidlertid et krav, at det betragtede område er væsenligt større end "teksturelementet". En enkelt mursten i en murstensvæg kan ikke udvise en tekstur, medmindre man i stedet betragter den måde hvorpå lerpartiklerne i murstenen er grupperet. Dette introducerer nødvendigheden af begrebet skala. Givet et billede, er det nødvendigt, inden valg af metode til teksturanalyse, at fastlægge den skala (det skalainterval) hvorunder en tekstur ønskes identificeret eller karakteriseret.

I det følgende beskrives nogle simple metoder til teksturanalyse. Vi skal ikke beskrive meget regelmæssige teksturer (strukturer), men primært beskrive metoder, der kan være velegnede til at karakterisere fænomener, der i forhold til opløsningen, er højfrekvente.

3.7.1 Frekvensbaserede beskrivelser

Visse teksturer kan beskrives ved gentagelse af et struktureelement. Dette er eksempelvis tilfældet med vævet stof, årene i et stykke træ, bølger i vesterhavet, gæsstråene i fælledparken etc. Selv om strukturelementet ikke er veldefineret og varierer i form over billedet, er selve gentagelsen ofte tilstrækkelig til en god karakterisering af teksturen. En oplagt idé er at fourieropløse intensitetsfunktionen og lede efter lokale ekstrema i styrkespektret for den fouriertransformerede. Hvis der findes markante ekstrema indikerer disse at en repetition af et mønster finder sted. Desuden er orienteringen af mønstret samt hyppigheden af dette direkte til rådighed. Amplituden indikerer kontrasten af mønsteret.

3.7.2 Co-occurrence matricer

En co-occurrence matrice bestriver en såkaldt 2. ordens statistik. Første ordens statistikker kan alle udledes ud fra histogrammet over stikprøverne (intensitetsværdierne). To typiske første ordens statistikker er middelværdien og variansen. Disse mål bærer imidlertid ingen information om positionerne af stikprøverne. Denne information er selvsagt af fundamental betydning ved teksturanalyser. I 2. ordens statistik betragtes sandsynlighederne for et par af (intensitets-) værdier opsamlet med fast relativ position. Eksempelvis optælles antallet af gange et punkt $(x+1, y)$ med intensitet I er venstre-nabo til et punkt (x, y) med intensitet J. Generelt er den relative positionering af de to punkter givet ved en vektor $(\Delta x, \Delta y)$. Antag at denne vektor er fastlagt på forhånd, og antag at antallet af intensitetsværdier er K. Da kan man opstille en $K \times K$-matrice $\mathbf{A}(i, j)$ indeholdende antallet af gange hvor intensiteten i og intensiteten j er observeret på positioner der adskilder sig ved vektoren $(\Delta x, \Delta y)$. Denne matrice kaldes en *Co-occurence matrice*. De tilsvarende sandsynligheder kan fås ved normering med antal observationer ialt. Hvis billedet har dimension $N \times M$ ses at normaliseringskonstanten er $(N - \Delta x) * (M - \Delta y)$.

Eksempel

Antag at der kan forekomme fire mulige forskellige intensiteter: 0, 1, 2, og 3. Da vil co-occurrence matricen $\mathbf{A}$ have dimension 4×4. Betragt intensitetsmønsteret i nedenstående 5×8 billedudsnit:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Antag videre at $(\Delta x, \Delta y) = (1, 0)$. Det ses let at $\mathbf{A}$ vil få formen:

$$\mathbf{A}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Normaliseringskonstanten er her 35. Betragt i stedet intensitetsbilledet:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Svarende til ovenstående fås:

$$\mathbf{A}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Normaliseringskonstanten er som før 35. Benyttes i stedet translationsvektoren $(\Delta x, \Delta y) = (0,1)$ fås:

$$\mathbf{A}_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Normaliseringskonstanten er her 32. Det et således klart at mønstret i intensitetsbilledet i visse simple tilfælde afspejles tydeligt i et mønster i co-occurrence matricen. Ligeledes er det klart at $\mathbf{A}_{(i,j)} \neq \mathbf{A}_{(j,i)}$.

Det er muligt at opstille mange co-occurence matricer, idet translationsvektoren kan vælges på mange måder. Som regel benyttes kun 4 matricer, svarende til vektorer med maksimumsnorm lig 1 (dvs. i de fire retninger: nordøst, øst, sydøst, og syd). De resterende 4 retninger vil give andledning til matricer med samme informationsindhold som de nævnte.

$$\mathbf{C}_{(-\Delta x, -\Delta y)} = \mathbf{C}^t_{(\Delta x, \Delta y)} \tag{3.45}$$

I visse situationer er det tilstrækkeligt kun at opstille 2 matricer (øst, og syd). Af ovenstående eksempel ses, at disse matricer vil være forskellige. Ønskes en mere rotationsinvariant statistik kan man tage gennemsnit af de opstillede matricer:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}[\frac{1}{N_{(1,0)}}\mathbf{A}_{(1,0)} + \frac{1}{N_{(0,1)}}\mathbf{A}_{(0,1)}] \tag{3.46}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{4}[\frac{1}{N_{(1,1)}}\mathbf{A}_{(1,1)} + \frac{1}{N_{(1,0)}}\mathbf{A}_{(1,0)} + \frac{1}{N_{(1,-1)}}\mathbf{A}_{(1,-1)} + \frac{1}{N_{(0,1)}}\mathbf{A}_{(0,1)}] \tag{3.47}$$

Det er relativt let og hurtigt at opstille ovennævnte statistikker, men informationen i matricerne kan være svær at fortolke umiddelbart. Dette gælder især hvis antallet af mulige forskellige intensitetsværdier er stor. Det er derfor oplagt at beregne nogle færre, og lettere forståelige mål, ud fra **C**-matricen. Der findes en lang række sigende mål. Blandt disse er:

1. Den maksimale sandsynlighed:
$$\max_{i,j} \mathbf{C}(i,j) \tag{3.48}$$

2. Energien:
$$\sum_i \sum_j \mathbf{C}^2(i,j) \tag{3.49}$$

3. Entropien:
$$-\sum_i \sum_j \mathbf{C}(i,j) \log \mathbf{C}(i,j) \tag{3.50}$$

4. Autocorrelationen:
$$\sum_i \sum_j \frac{(i-\mu_x)(j-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \mathbf{C}(i,j) \tag{3.51}$$
hvor μ_x hhv. μ_y er middelværdierne mht. x hhv. y over summen af værdier $\mathbf{C}$ over y hhv. x, og hvor σ_x hhv. σ_y er de tilsvarende standardafvigelser.

5. Det diagonale moment:
$$\sum_i \sum_j |i-j|(i+j-\mu_x-\mu_y)\mathbf{C}(i,j) \tag{3.52}$$

6. Det k'te ordens differensmoment:
$$\sum_i \sum_j (i-j)^k \mathbf{C}(i,j) \tag{3.53}$$

7. Det k'te ordens inverse differensmoment:
$$\sum_i \sum_j (i-j)^{-k} \mathbf{C}(i,j) \tag{3.54}$$

En lang række yderligere mål kan opstilles. Disse (og deres fortolkning) er bl.a. beskrevet i *J. M. Carstensen: Description and Simulation of Visual Texture, IMSOR, DTH afhandling nr. 59, 1992.*

3.8 Opgaver

1. Beskriv en metode til detektion af den dybeste/bredeste e.lign. dal i intensitetshistogrammet, og implementer metoden. Foretag en binarisering af billedet ved grænseværdiafskæring med den fundne værdi.

2. Undersøg eksperimentelt metoden hvor intensitetshistogrammet udglattes, samtlige dale i det udglattede histogram benyttes til bestemmelse af et sæt af grænseværdier, som billedet herefter segmenteres i forhold til.

3. Implementer segmenteringen skitseret i afsnit 3.2.

4. Implementer en merge-segmentering på basis af en initiel segmentering ved algoritmen fra ovenstående opgave. Implementeringen bør omfatte repræsentation af nabo-relationerne. Vurder segmenteringen ved forskellige merge-prædikater.

5. Skitsér skelettet for et segment med rektangular form, og for et segment med "L"-form (se opgave 11). Introducer derefter lidt støj i kantformerne og vurdér stabiliteten af skellettet mht. støj.

6. Diskuter hvorledes metoden fra Kapitel 2 til beregning af skeletter kan modificeres således at radius informationen beregnes samtidig med bestemmelsen af skelettets position.

7. Diskuter hvorledes omkredsen af et segment kan måles, samt hvor invariante målet (målene) er mht. rotation.

8. Vis at det første af de syv invariante momenter faktisk er invariant over for translation, skalering og rotation.

9. Skriv og afprøv et program til beregning af de 7 invariante momenter. Antag at segmentet er repræsenteret ved en liste af punkter. Eksperimenter med robustheden af målene. “Hvor invariante” er de mht. translation, rotation og skalering.

10. Beregn Areal, Omkreds, Kompakthed, De principale akser for segmentet, herunder egenværdierne for kovariansmatricen (3.21), skelettet for segmentet samt de centrale momenter op til og med 2. orden for segmentet. Betragt følgende segment hvor de afkrydsede felter angiver at feltet tilhører segmentet. Benyt at x-aksen peger mod højre, at y-aksen peger opad, og at nederste venstre felt har koordinaterne $(0, 0)$.

	x	x	x	
x	x	x	x	x
x	x	x	x	
	x	x		

11. Som opgave 10, blot med segmentet:

x	x			
x	x			
x	x			
x	x			
x	x			x
x	x	x	x	x
x	x	x	x	x

12. Som opgave 10, blot med segmentet:

						x
				x	x	x
		x	x	x	x	
			x	x		
		x	x	x		
	x	x	x	x		
	x	x	x			
x	x	x				

13. Som opgave 10, blot med segmentet:

			x	x			x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
x	x	x			x	x	x	x		
	x	x			x	x	x			
	x	x	x		x	x				
		x	x	x	x					

14. Opstil co-occurence matricerne $\mathbf{A}_{(1,0)}$ og $\mathbf{A}_{(0,1)}$ for nedenstående billedudsnit, og beregn matricen $\mathbf{C}$ ved gennemsnit. Det antages at billedet rummer 4 forskellige værdier: 0, 1, 2, og 3.

0	0	1	1	3	2	2	2	3	3	2	2
0	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	1
1	1	1	0	2	2	3	3	2	3	1	1
1	1	2	2	2	3	3	2	2	1	1	0
1	3	2	2	3	3	2	2	1	2	0	0
2	2	2	3	3	2	2	1	3	0	0	1
2	2	3	3	2	1	1	1	0	0	1	1
2	3	0	2	2	0	1	0	0	1	1	1

Beregn derefter de energien, entropien samt det diagonale moment.

15. Programmer beregningen af co-occurence matricerne $\mathbf{A}_{(1,0)}$ og $\mathbf{A}_{(0,1)}$ samt matricen $\mathbf{C}$ og 3 af de i noterne beskrevne mål. Anvend programmet på et sæt af billeder med forskellig tekstur. Beskriv forskellene i de beregnede teksturmål, og relater eventuelle forskelle til billederne.